ЗАДАЧА ДОСТРАИВАНИЯ ПОДЗЕМНОГО КОНТУРА С ПОНУРОМ И ВЕРХОВЫМ ШПУНТОМ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Г.А. Журавлева, И.С. Липатникова

Марийский государственный университет
Kokurin @ margu.mari.ru

В работе решается обратная смешанная задача напорной фильтрации по определению формы подземного контура гидросооружения при двух нелинейных законах фильтрации.

Постановка задачи. Под действием заданного напора H происходит установившаяся фильтрация идеальной несжимаемой жидкости под гидросооружением. Водопроницаемый слой на глубине T относительно верхнего бьефа подстилается горизонтальным сильно дренирующим основанием KM, гашение напора H_0 на котором считается известным.

Подземный контур плотины состоит из плоского понура AB с гашением напора на нем H_1, вертикального верхового шпунта BCD с гашением напора H_2 на участке BC и H_3 на участке CD и неизвестной части DE, на которой задается скорость фильтрации как функция дуговой абсциссы:

$$V=V(\delta),\ 0\le\delta\le L, \tag{1}$$

где L - длина искомого контура. Функция $V(\delta)$ предполагается непрерывной и монотонной.

Уравнение движения для нелинейной фильтрации имеет вид [1]

$$\mathrm{grad}\, h= - V\frac{f(V)}{V}, \tag{2}$$

где h(x,y) - функция напора, f(V) - закон фильтрации. После введения функции тока ψ(x,y), потенциальной функции φ(x,y) и видоизмененного годографа скорости $\chi=\theta+iS$, где θ - угол наклона вектора скорости, а S определяется из формулы

$$dS=\sqrt{f'(V)/Vf(V)}\,dV, \tag{3}$$

уравнение (2) приводится к виду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \dfrac{1}{k(s)}\dfrac{\partial\psi}{\partial s}, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial s} = -\dfrac{1}{k(s)}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}, \end{cases} \tag{4}$$

где $k(s)=\dfrac{V}{f(V)}\sqrt{Vf'(V)/f(V)}$. После определения комплексного потенциала $w(\chi)=\varphi(\theta,s)+i\psi(\theta,s)$

переход в физическую плоскость осуществляется по формуле

$$dz=\frac{e^{i\theta}}{V}\left[V\frac{d\varphi}{f(V)}+id\psi\right], \tag{5}$$

откуда и получается уравнение искомого контура в параметрическом виде.

Общее решение задачи. Для получения аналитического решения задачи ограничимся нелинейными законами фильтрации двух видов:

$$f(V)=\frac{V}{\sqrt{1+(V/m)^2}}, \qquad f(V)=\frac{V}{\sqrt{1-(V/m)^2}}. \tag{6}$$

В этом случае $k(s)=1$ в системе (4), следовательно, $W(\chi)$-аналитическая функция. В плоскости комплексного потенциала W области течения соответствует полуполоса с разрезом (рис.1).

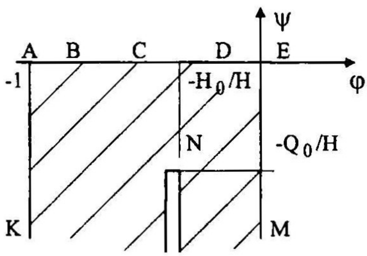

Рис. 1

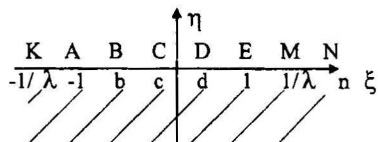

Рис. 2

Полуполоса отображается на полуплоскость $Jm\zeta<0$ с указанным соответствием точек (рис.2). Отображающая функция находится по формуле Кристоффеля-Шварца и имеет вид

$$W=(1-\frac{2H_0}{H})1/(\pi)\mathrm{arctg}\frac{\lambda\sqrt{1-\zeta^2}}{\lambda'}-1/(\pi)\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\lambda'}. \qquad (7)$$

Отсюда определяется связь между параметрами b, c, d и гашением напора H_1/H, H_2/H, H_3/H. Очевидно, что при расчетах удобнее задавать значения b, c, d и определять соответствующее им гашение напора на понуре и шпунте.

Таким образом, задача свелась к определению аналитической функции $\chi(\zeta)=\theta(\xi,\eta)+iS(\xi,\eta)$ в полуплоскости $\mathrm{Jm}\zeta<0$ по граничным условиям на вещественной оси:

$$\text{на KA,BC,NK: } \theta=-\frac{\pi}{2}; \quad \text{на CD,EM,NM: } \theta=\frac{\pi}{2};$$

$$\text{на AB: } \theta=0; \quad \text{на DE: } S=S(\varphi).$$

Решение определяется по формуле Синьорини (см., напр.,[2]) и на вещественной оси имеет вид

$$\chi=\frac{1}{i}(\ln\sqrt{(1-\xi)(d-b)+(\xi-d)(1-b)}-\ln\sqrt{(1-\xi)(d+1)+2(\xi-d)}-$$
$$-2\ln\sqrt{(1-\xi)(d-c)+(\xi-d)(1-c)}+2\ln\sqrt{(1-\xi)(n-d)+(\xi-d)(n-1)}+$$
$$+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\xi}{\xi-b}+\ln\frac{\xi-c}{n-\xi})+\theta-\frac{\sqrt{(\xi-1)(\xi-d)}}{\pi}\int_d^1\frac{s(t)dt}{(t-\xi)\sqrt{(t-1)(t-d)}}, \qquad (8)$$

где
$$\theta=\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{(\xi-d)(1-b)}{(1-\xi)(d-b)}}-\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2(\xi-d)}{(1-\xi)(d+1)}}+$$
$$+2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{(\xi-d)(n-1)}{(1-\xi)(n-d)}}-2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{(\xi-d)(1-c)}{(1-\xi)(d-c)}}+\frac{\pi}{2}. \qquad (9)$$

Определяя теперь $d\varphi$ из (7) и интегрируя (5), получим параметрические уравнения искомого контура:

$$\begin{cases} X=1/\pi\int_d^{\xi}\frac{\cos\theta}{f(V)}F(\xi)d\xi, \quad F(\xi)=\frac{(\frac{2H_0}{H}\lambda\xi-\lambda\xi+1)\lambda'}{\sqrt{1-\xi^2}(1-\xi^2\lambda^2)}, \\ Y=1/\pi\int_d^{\xi}\frac{\sin\theta}{f(V)}F(\xi)d\xi+y_d, \quad d\le\xi\le 1, \end{cases} \qquad (10)$$

где $y_d = 1/\pi \int\limits_c^d \frac{F(\xi)d\xi}{f(V)} + y_c$, $y_c = -1/\pi \int\limits_b^c \frac{F(\xi)}{f(V)} d\xi$, длина понура $l = 1/\pi \int\limits_{-1}^b \frac{F(\xi)}{f(V)} d\xi$.

Для определения глубины залегания дренирующего основания T используется тот факт, что при обходе точки $\xi = -\frac{1}{\lambda}$ в полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta < 0$ в физической плоскости Z получает приращение $\Delta z = -iT$, а напор изменяется на $(H - H_0)$, отсюда

$$T = (H - H_0)/f(V_k).$$

Определяя $S_k(\lambda) = \mathrm{Im}\,\chi(-\frac{1}{\lambda})$ из формулы (8), находим из (3) и (6) $f(V_k) = f_k(\lambda)$. Аналогично определяется глубина залегания дренирующего основания относительно нижнего бьефа: $T_M = H_0 / f(V_M)$, где $f(V_M) = f_M(\lambda)$ с учетом $S_M(\lambda) = \mathrm{Im}\,\chi(\frac{1}{\lambda})$.

Отсюда получается условие расположения бьефов на одном уровне:

$$\frac{H - H_0}{f_k(\lambda)} = \frac{H_0}{f_M(\lambda)}.$$

Как частные случаи рассмотренной задачи получаются контуры без понура (b= -1), без шпунта (c=d=b), с бесконечным залеганием дренирующего основания (λ=0), а также контур постоянной скорости $V = V_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С.А. *Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси* //ПММ. – 1940. –Т.4. – Вып.1. – С. 165-172.

2. Нужин М.Т., Ильинский Н.Б. *Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Обратные краевые задачи теории фильтрации.* – Казань: Казан. ун-та, 1963. – 140 с.